

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 26 ΙΟΥΝΙΟΥ 1999  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά και  $\theta$  είναι η γωνία των

$\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , να αποδείξετε ότι:  $\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Μονάδες 4

**B.**

α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$  και  $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$ , με  $\lambda \neq 0$ . Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{\alpha}_1$  και  $\vec{\beta}_1$  είναι κάθετα;

A.  $\lambda = 1,$

B.  $\lambda = 3,$

Γ.  $\lambda = 2,$

Δ.  $\lambda = -2,$

E.  $\lambda = -3.$

**Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.**

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1, -\sqrt{3}), \vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$  και  $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$ .

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄ με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

ΣΤΗΛΗ Α΄

1. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$
2. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$
3. γωνία των  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$

ΣΤΗΛΗ Β΄

A.  $\pi/2$

B.  $\pi/6$

Γ.  $\pi/4$

Δ.  $2\pi/3$

E.  $3\pi/4$

Z.  $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α΄ και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β΄ που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 2\kappa + 2$  και  $\beta = 6\kappa + 7$ , όπου  $\kappa$  ακέραιος αριθμός.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί  $3\alpha$  και  $\beta$  είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού  $(2\beta - \alpha)$  με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

γ) Αν ο αριθμός  $\kappa$  είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός  $(\alpha + \beta - 2)$  είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνονται τα σημεία  $A(8,0)$  και  $B(0,4)$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων  $O$  και το μέσο  $\Delta$  του τμήματος  $AB$ .

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$  που διέρχεται από το σημείο  $\Delta$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $OA$ .

Μονάδες 9

γ) Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας  $(\epsilon)$ . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2$

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό  $n=1,2,3,\dots,1999$  και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:  $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ . Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο  $A$  (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ ;

Μονάδες 8

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας  $x+y-1=0$  στο σημείο  $A$ .

Μονάδες 8

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας μόνο στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 10.30΄ πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**