

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

**α.** Αν  $\alpha | \beta$ , τότε  $\alpha | \lambda \beta$  για κάθε ακέραιο  $\lambda$ .

Μονάδες 4

**β.** Αν  $\alpha | \beta$  και  $\alpha | \gamma$ , τότε  $\alpha | (\beta + \gamma)$ .

Μονάδες 4

**A.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω  $\alpha, \beta$  φυσικοί αριθμοί και  $\nu$  το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του  $\alpha$  με τον  $\beta \neq 0$ . Τότε:

**α.**  $(\alpha, \beta) < (\beta, \nu)$

**β.**  $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu)$

**γ.**  $(\alpha, \beta) > (\beta, \nu)$

**δ.**  $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu) + 1$

όπου  $(\alpha, \beta)$  είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών  $\alpha, \beta$ .

Μονάδες 4,5

**B.1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $7 | (\alpha + 5)$  και  $7 | (40 - \beta)$  τότε:

**α.**  $7 | (\alpha + \beta)$ ,

**β.**  $7 | (\alpha + \beta + 1)$ ,

**γ.**  $7 | (\alpha + \beta + 2)$ ,

**δ.**  $7 | (\alpha + \beta - 3)$ .

Μονάδες 4

**B.2.** Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

**B.3.** Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

**ΘΕΜΑ 2ο**

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$  και

$$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}. \text{ Έστω τα διανύσματα } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

**α.** το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

**β.** τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

Μονάδες 8

**γ.** το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

**δ.** το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$ .

**α.** Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

Μονάδες 7

**β.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι κάθετες.

Μονάδες 7

**γ.** Να βρείτε ένα σημείο  $M(\kappa, \lambda)$  με  $\kappa > 0$  και  $\lambda > 0$  τέτοιο, ώστε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$  να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και το διάνυσμα  $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$  να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

- δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων  $O$ , άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x'$  και διέρχεται από το σημείο  $M$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 4ο**

- A. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ , όπου  $\mu, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των  $\mu, \lambda$ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O$ .

Μονάδες 7

- B. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\mu, \lambda$  ισχύει η σχέση  $3\mu + 2\lambda = 0$ .

- α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  για τις διάφορες τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- β. Να βρείτε τα  $\mu, \lambda$  έτσι, ώστε, αν  $A, B$  είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία  $x + y + 2 = 0$ , να ισχύει  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .

Μονάδες 6

- γ. Για τις τιμές των  $\mu, \lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα

που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**