

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  με  $f(α) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(β) > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty .$$

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left( \int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

- στ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

- α. Δείξτε ότι:  $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

**Μονάδες 7**

- β. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 9**

- γ. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

**α.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 3**

**β.** Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ .

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Μονάδες 7**

**γ.** Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .

**Μονάδες 8**

**δ.** Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2 f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

**α.** Να δειχθεί ότι:  $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$ .

**Μονάδες 6**

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007} .$$

Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**