ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000-2008

1. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(x_0,f(x_0))

(Θέμα 1 Α1θετ-2000)

ΘΕΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Θέμα 1 Α2θετ-2000
Θέμα 1 Α-2003
Θέμα 1 Α- ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Θέμα 1 Α1-2001
Θέμα 1 Α1-2007)

ΘΕΜΑ 4

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

(Θέμα 1 Β2-2001)

ΘΕΜΑ 5

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

a. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
b. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

(Θέμα 1 Α1- ΕΠΑΝ 2001
Θέμα 1 Β- ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 6

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Θέμα 1 Α-2002)

ΘΕΜΑ 7

Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

(Θέμα 1 Β1-2002)

ΘΕΜΑ 8

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Β-2003)

ΘΕΜΑ 9

Πότε μια ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

(Θέμα 1 Γ- ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 10

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$

(Θέμα 1 Α-2004)

ΘΕΜΑ 11

Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Θέμα 1 Β-2004)

ΘΕΜΑ 12

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

(Θέμα 1 Α-ΕΠΑΝ 2004)

ΘΕΜΑ 13

Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

(Θέμα 1 Γ-ΕΠΑΝ 2004)

ΘΕΜΑ 14

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

(Θέμα 1 Α1-2005)

ΘΕΜΑ 15

Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

(Θέμα 1 Α2-2005)

ΘΕΜΑ 16

Έστω η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(Θέμα 1 Α1-ΕΠΑΝ 2005)

ΘΕΜΑ 17

Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται ΄΄1-1΄΄

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΑΝ 2005)

ΘΕΜΑ 18

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα *Δ*.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

(Θέμα 1 Α1-2006)

ΘΕΜΑ 19

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

(Θέμα 1 Α2-2006)

ΘΕΜΑ 20

Να αποδείξετε ότι $\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

(Θέμα 1 Α1-ΕΠΑΝ 2006)

ΘΕΜΑ 21

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΑΝ 2006)

ΘΕΜΑ 22

Πότε δυο συναρτήσεις f , g λέγονται ίσες;

(Θέμα 1 Α2-2007)

ΘΕΜΑ 23

Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Θέμα 1 Α3-2007)

ΘΕΜΑ 24

Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Α2-ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 25

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}.$$

(Θέμα 1 Α1-2008)

ΘΕΜΑ 26

Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

(Θέμα 1 Α2-2008)

ΘΕΜΑ 27

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Θέμα 1 Α-ΕΠΑΝ 2008)

ΘΕΜΑ 28

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2008)

2. ΘΕΜΑΤΑ ‘‘ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ’’

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

ΘΕΜΑ 29

a. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

b. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

c. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

(Θέμα 1 Β1-ΘΕΤ 2000)

ΘΕΜΑ 30

a. $|z|^2 = z\,\overline{z}$

b. $|z^2| = z^2$

c. $|z| = -|\overline{z}|$

d. $|z| = |\overline{z}|$

e. $|i\,\overline{z}| = |z|$

(Θέμα 1 Α2- 2001)

ΘΕΜΑ 31

a. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

b. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

c. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

d. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$.

e. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0

(Θέμα 1 Β2- 2002)

ΘΕΜΑ 32

a. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

b. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

c. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

d. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

e. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2002)

ΘΕΜΑ 33

a. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

b. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

c. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

d. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

e. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

(Θέμα 1 Γ- 2003)

ΘΕΜΑ 34

a. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\left||z_1|-|z_2|\right| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

b. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Άν $f'(x_0) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x_0) < 0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

c. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

d. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:
$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 35

a. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

b. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

c. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g'(x_0)$

d. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x_0) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

e. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$

(Θέμα 1 Γ- 2004)

ΘΕΜΑ 36

a. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

b. Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

c. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

d. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

e. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x_0) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2004)

ΘΕΜΑ 37

a. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει ξ ∈ (α,β) ώστε f(ξ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β)>0.

b. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

c. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

d. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

e. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$.

f. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(Θέμα 1 Β- 2005)

ΘΕΜΑ 38

a. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

b. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_0,f(x_0)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

c. Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

d. Αν για δυο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$

e. Οι εικόνες δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα χ΄χ.

f. Αν η συνάρτησης f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει: $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2005)

ΘΕΜΑ 39

a. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

b. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

c. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

d. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

e. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

(Θέμα 1 Β- 2006)

ΘΕΜΑ 40

a. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$.

b. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

c. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.

d. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

e. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2006)

ΘΕΜΑ 41

a. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

b. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x_0) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

c. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

d. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

e. Αν α > 1 τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

(Θέμα 1 Β- 2007)

ΘΕΜΑ 42

a. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

b. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x) dx$.

c. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t) dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

d. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$.

e. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

(Θέμα 1 Β-ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 43

a. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \quad x \in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \quad y \in f(\mathrm{A})$.

b. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

c. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

d. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

e. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(Θέμα 1 Β- 2008)

ΘΕΜΑ 44

a. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1 – 1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

b. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους

c. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

d. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

e. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - \ell\right) = 0$$

(Θέμα 1 Γ-ΕΠΑΝ 2008)

3. ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

ΘΕΜΑ 45

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α Συναρτήσεις	**Στήλη Β** Εφαπτόμενες
a. $f(x)=3x^3,\quad x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
b. $f(x)=\eta\mu 2x,\quad x_0=\pi/2$	2. $y=(1/4)x+1$
c. $f(x)=3\lvert x\rvert,\quad x_0=0$	3. $y=9x-6$
d. $f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. *δεν υπάρχει*

(Θέμα 1 Β2-ΘΕΤ 2000)

ΘΕΜΑ 46

Αν $z_1 = 3 + 4i$ *και* $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$ να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
1.	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	**α.**	4
2.	$\lvert z_1^2\rvert$	**β.**	2
3.	$\lvert z_2\rvert^2$	**γ.**	25
4.	$-\lvert \overline{z_1}\rvert$	**δ.**	-5
5.	$\lvert i\, z_2\rvert$	**ε.**	-2
		στ.	5
		ζ.	10

(Θέμα 1 Β1- 2001)

ΘΕΜΑ 47

Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

a. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \ldots\ldots$ b. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \ldots\ldots$ c. $\int_\alpha^\beta (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \ldots\ldots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]

(Θέμα 1 Α2- ΕΠΑΝ 2001)

ΘΕΜΑ 48

a. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5 + i}{2 + 3i}$. Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi, α,β ∈ R.

b. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\left|\dfrac{z - 1}{z - i}\right| = 1$.

(Θέμα 2-ΤΕΧ 2000)

ΘΕΜΑ 49

a. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z+16| = 4|z+1|$$

b. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-1| = |z-i|$$

(Θέμα 2 - ΕΠΑΝ 2001)

ΘΕΜΑ 50

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α,β∈IR και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

a. Να αποδείξετε ότι Re(w)=3α–β+4 και Im(w)=3β–α.

b. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2.

c. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

(Θέμα 2- 2003)

ΘΕΜΑ 51

a. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0$

b. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα χ΄χ.

(Θέμα 2-ΕΠΑΝ 2003)

ΘΕΜΑ 52

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

a. Δείξτε ότι: $\overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$.

b. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

c. Δείξτε ότι : $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

(Θέμα 2- 2005)

ΘΕΜΑ 53

a. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z-\overline{z}_2=5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

b. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z-1-3i|\le\sqrt{2}$ και $|w-3-i|\le\sqrt{2}$:

   i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και

   ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

(Θέμα 2-ΕΠΑΝ 2005)

ΘΕΜΑ 54

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2,z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$

a. Να αποδείξετε ότι:

   i. $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

   ii. $|z_1-z_2|^2\le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\ge -1$

b. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1,z_2,z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

(Θέμα 3- 2006)

ΘΕΜΑ 55

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+ai}{a+2i}$, με $a\in\mathbb{R}$

a. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

b. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+ai}{a+2i}$ για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

   i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1, z_2.

   ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό ν.

(Θέμα 2- 2007)

ΘΕΜΑ 56

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$

a. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.
b. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.
c. Αν ο αριθμός $z_1^{\,2}$ είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$\left(z_1 + 1 + i\right)^{20} - \left(\overline{z_1} + 1 - i\right)^{20} = 0.$$

(Θέμα 4-ΕΠΑΝ 2007)

ΘΕΜΑ 57

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|\left(i + 2\sqrt{2}\right)\right| = 6 \text{ και } \left|w - (1-i)\right| = \left|w - (3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

a. Το γεωμετρικό των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
b. Το γεωμετρικό των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
c. Την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
d. Την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

(Θέμα 2- 2008)

ΘΕΜΑ 58

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

a. Να αποδείξετε ότι β = –1 και γ = 1.
b. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.
c. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$

(Θέμα 2-ΕΠΑΝ 2008)